5. Devoir maison

Toutes les questions doivent être traitées par écrit ; si votre recherche n'est pas fructueuse, laissez-en une trace écrite pour chaque question non résolue.

On considère le polynôme P à coefficients réels et défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^6 + 8$.
On appelle "racines" d'un polynôme P les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
On admet que dans $\mathbb{C}$ un polynôme de degré n (le degré est la plus haute puissance de la variable) admet exactement n racines que l'on notera $z_1, z_2, ..., z_n$.
Le polynôme P se factorise alors sous la forme $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$ (où a est le coefficient du terme de plus haut degré dans l'expression de $P(z)$).

1. (a) Vérifier que dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -8$ admet pour solutions : $z_1 = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$; $z_2 = \sqrt{2} \times (-i)$; $z_3 = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$; $z_4 = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$; $z_5 = \sqrt{2} \times i$; $z_6 = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

   (b) En s'aidant éventuellement d'un cercle trigonométrique, donner les valeurs de $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$; $sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$.
   En s'aidant d'un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, représenter graphiquement les points images des solutions z_1, z_2, ...z_6 dans le plan complexe

2. Soient a un nombre complexe et A le point d'affixe a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

   (a) Montrer que $a \times \overline{a} = OA^2$ (on pourra poser $a = x + iy$ pour mener à bien les calculs)

   (b) On suppose désormais que $OA = 1$. Montrer que $(z - a)(z - \overline{a}) = z^2 - 2Re(a)z + 1$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(z) = 0$, alors $P(\overline{z}) = 0$.
   En déduire que $P(z)$ possède trois couples de racines complexes conjuguées.

4. En déduire une factorisation du polynôme P sur $\mathbb{R}$.